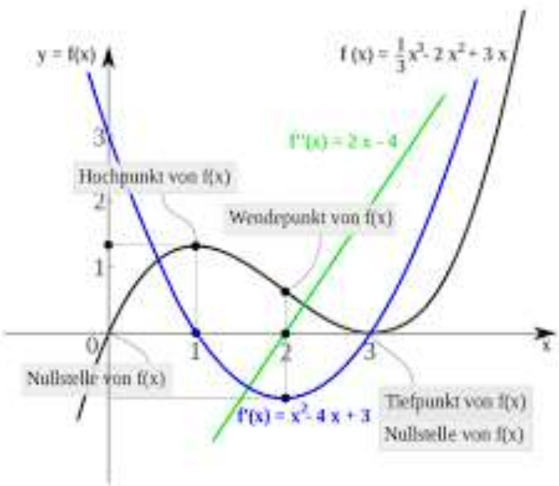
Höhere Handelsschule

Formelsammlung für die Fachhochschulreife

Mathematik

Inhalt	**Seite**



Formelsammlung zur FHR-Prüfung Mathematik

HöHa – Jahrgangsstufe 11

1. Lineare Funktionen

Geradengleichung	$y = m \cdot x + b$	m Steigung
	$x = 0 \Rightarrow$	b Schnittpunkt mit der y-Achse
	$y = 0 \Rightarrow$	**–**b/m Schnittpunkt mit x-Achse
Gerade durch zwei Punkte	$P_1 = (x_1 \mid y_1)$, $P_2 = (x_2 \mid y_2)$	
Steigung **m**	$m = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1)$	$m = \Delta y : \Delta x$ Steigungsdreieck
y-Achsenabschnitt **b**	$b = y_1 - m \cdot x_1 = y_2 - m \cdot x_2$	

2. Quadratische Funktionen

Allgemeine Form	$y = ax^2 + bx + c$	$y = f(x)$
Normalform	$y = x^2 + px + q$	a = 1, Normalparabel
Scheitelpunktform	$y = a(x - x_S)^2 + y_S$	a = Parabelkrümmung
Scheitelpunkt	$S = (x_S \mid y_S)$	$x_S = -b / 2a = -q / 2$
	$x_S = (x_1 + x_2) : 2$	x_1 und x_2 -> Nullstellen
Achsenschnittpunkte	$x = 0 \Rightarrow y_0 = c$	Schnittpunkt y-Achse
	$y = 0 \Rightarrow x_{1,2} \Rightarrow$	siehe quadratische Gleichungen
Parabelkrümmung **a**	sind der Scheitelpunkt $S(x_S \mid y_S)$ und ein weiterer Punkt	
$P(x_1 \mid y_1)$ bekannt, so gilt	$a = (y_1 - y_S) : (x_1 - x_S)^2$	$a = \Delta y_s : \Delta x_s^2$

3. Quadratische Gleichungen

Allgemeine Form	$ax^2 + bx + c = 0$	durch **a** teilen!
Normalform	$x^2 + px + q = 0$	mit $p = b:a$ $q = c:a$
Quadratische Ergänzung	$(x + p/2)^2 = (p/2)^2 - q$	
Lösungen (Nullstellen)	$x_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{(p/2)^2 - q}$	p-q-Formel
Linearfaktoren	gesucht werden **u** und **v** mit $u \cdot v = q$ und $u + v = p$	
(Lösungen raten)	$(x + u) \cdot (x + v) = 0$	$\Rightarrow x_1 = -u$, $\Rightarrow x_2 = -v$
Satz von Vieta	$x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$	$\Rightarrow$ Probe für quadr. Gl.

4. Binome, Binomische Formeln

$(a + b)^2 = (a + b) \bullet (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$	1. Binomische Formel
$(a - b)^2 = (a - b) \bullet (a - b) = a^2 - 2ab + b^2$	2. Binomische Formel
$(a + b) \bullet (a - b) = a^2 - b^2$	3. Binomische Formel

Formelsammlung zur FHR-Prüfung Mathematik

HöHa – Jahrgangsstufe 12

5. Ableitung und Differentialrechnung (Funktionsanalyse)

Steigung der Tangente $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$

Dies ist der **Differentialquotient** oder die **Ableitung** der Funktion f(x): $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Steigung im Punkt **P**, **Steigungswinkel:** **m = f‘ (x_p) = tan(α)** **α = $\tan^{-1}$(m)**

1. Ableitung	Steigung einer Kurve	f‘(x)
2. Ableitung	Krümmung einer Kurve	f‘‘(x)
Extremwerte (Min / Max)	keine Steigung	f’(x) = 0
Max: f’(x) = 0 und f’’(x) < 0	keine Steigung (eben), Tendenz wieder abfallend	
Min: f’(x) = 0 und f’’(x) > 0	keine Steigung (eben), Tendenz wieder ansteigend	
Wendepunkte	keine Krümmung, min./max. Steigung	f’’(x) = 0
Sattelpunkt	f’(x) = 0 und f’’(x) = 0 (ebener Wendepunkt)	

6. Stammfunktion und Integralrechnung

Definition 1

Eine Funktion *F(x)* heißt **Stammfunktion** von *f(x)*, falls gilt $F'(x) = f(x)$
Die Ableitung der Stammfunktion ergibt stets wieder die ursprüngliche Funktion.
Das **Integrieren** (Bildung der Stammfunktion) ist die **Umkehr** des **Differenzierens** (des Ableitens)

Definition 2

Ist $F'(x) = f(x)$, so nennt man die Funktion $G(x) = F(x) + C$ ein **unbestimmtes Integral** von $f(x)$. Für alle denkbaren Werte für ***C*** gilt ebenfalls *G‘(x) = F‘(x) = f(x)* ***C*** heißt Integrationskonstante. In der Regel suchen wir die *einfachste Stammfunktion* ***F(x)*** mit *C = 0*

Man schreibt: $\int f(x)\, dx = F(x) + C$ gelesen: Integral über f(x) dx

Definition 3

Das **bestimmte Integral** in den Grenzen **a, b** ist die **Fläche zwischen dem Graphen der Funktion *f (x)* und der x-Achse** im Bereich von x = a bis x = b, *F(x)* ist die Stammfunktion von *f(x)*:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \qquad mit \quad a < b$$

Falls *a = 0*, so gilt zugleich *F(0) = 0*, daraus folgt: $\int_0^b f(x) \cdot dx = F(b)$

7. Ableitungs- und Integrationsregeln

f‘(x) Ableitung, F(x) Stammfunktion

$\boldsymbol{f(x) = a}$	$f'(x) = 0$	$F(x) = a \cdot x$
$\boldsymbol{f(x) = a \cdot x}$	$f'(x) = a$	$F(x) = \frac{a}{2} \cdot x^2$
$\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^2}$	$f'(x) = 2a \cdot x$	$F(x) = \frac{a}{3} \cdot x^3$
$\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^3}$	$f'(x) = 3a \cdot x^2$	$F(x) = \frac{a}{4} \cdot x^4$
$\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^4}$	$f'(x) = 4a \cdot x^3$	$F(x) = \frac{a}{5} \cdot x^5$
$\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^n}$	$f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1}$	$F(x) = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1}$
$\boldsymbol{f(x) = a / x^n}$	$f'^{(x)} = -n \cdot a \cdot 1/x^{n+1}$	*mit x im Nenner!*

Formelsammlung zur FHR-Prüfung Mathematik

8. Nullstellenbestimmung – Lösungswege zur Berechnung von Nullstellen

8.1 Newton-Verfahren (Näherung)

Gegeben ist uns eine Funktion *f(x)*, für welche eine Nullstelle zu berechnen ist. Wir suchen uns einen ersten **Näherungswert** für die Nullstelle x_{N0} oder kürzer x_0 (Taschenrechner, Grafik). Dazu bestimmen wir den Funktionswert $f(x_0)$ und die Ableitung, also die Steigung der Kurve an dieser Stelle, $f'(x_0)$:

Für die nächste, verbesserte Näherung x_2 der Nullstelle erhalten wir dann:

$$verbesserte\ Näherung:\ x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad oder\ \ x_1 = x_0 - \Delta x \quad mit \quad \Delta x = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Allgemein für die nachfolgenden Näherungen x_2, x_3, x_n, x_{n+1} gilt:

$$allgemein: \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad oder \quad x_{n+1} = x_n - \Delta x \quad mit \quad \Delta x = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Bei einem gut gewählten Anfangswert wird der Korrekturterm $\Delta x = f(x_n) : f'(x_n)$ rasch sehr klein, sodass keine weitere Näherung zu berechnen ist.

8.2 Substitution $x^2 \rightarrow z$ (ersetzen)

Gegeben ist eine Funktion vierten Grades $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, sie besitzt nur gerade Zahlen als Exponenten von x. Wir ersetzten x² durch z: $x^2 \rightarrow z$ bzw. $x^4 \rightarrow z^2$ und erhalten $f(z) = az^2 + bz + c$
Die Nullstellen dieser substituierten Funktion $z_{1,2}$ lassen sich nach den Lösungswegen für quadratischen Gleichungen bestimmen. Die maximal vier Nullstellen ergeben sich durch Wurzelziehen zu $x_{1,2} = \sqrt{z_1}$ und $x_{3,4} = \sqrt{z_2}$, sofern $z_{1,2} \geq 0$
Bei einer Funktion fünften Grades $g(x) = ax^5 + bx^3 + cx$, die nur ungerade Zahlen als Exponenten von x besitzt, können wir zunächst x ausklammern ($x_1 = 0$) und weiter wie oben verfahren.

8.3 Linearfaktoren bilden

Sind von einer Funktion, etwa $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ **alle Nullstelle bekannt**, hier $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, $\mathbf{x_3}$, so lässt sich der Funktionsterm auch durch Linearfaktoren schreiben:
$f(x) = a \cdot (x - \mathbf{x_1}) \cdot (x - \mathbf{x_2}) \cdot (x - \mathbf{x_3})$
Dies gilt analog für quadratische Funktionen mit zwei und für Funktionen 4. Grades mit vier Linearfaktoren usw. Ist 0 selbst eine Nullstelle, läuft die Funktion also durch den Ursprung, so ist **x** selbst einer der Linearfaktoren und lässt sich **Ausklammern**, die Funktion enthält dann keine Zahl ohne x (d = 0): $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \rightarrow f(x) = x \cdot (ax^2 + bx + c)$

8.4 Polynomdivision (durch Linearfaktoren teilen)

Besitzt eine Funktion, etwa $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ eine **bekannte Nullstelle** bei $\mathbf{x_N}$, so lässt sich der Funktionsterm ohne Rest durch $(x - \mathbf{x_N})$ teilen.
Wir teilen wir den Funktionsterm zunächst durch **a** und erhalten:
$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ mit $p = b/a$, $q = c/a$ und $r = d/a$
Dann folgt die Polynomdivision: $(x^3 + px^2 + qx + r) : (x - \mathbf{x_N}) = x^2 + ux + v$
In der quadratischen Gleichung $x^2 + ux + v = 0$ stecken die verbleibenden Nullstellen, hier maximal zwei. Vergleichbar bei allen Funktionen zweiten und höheren Grades.

9. Formelsammlung Geometrie *(Falls erforderlich)*

Spezielle Formeln der Geometrie werden hier ggf. eingefügt

Formelsammlung zur FHR-Prüfung Mathematik

10. Steckbriefaufgaben (Funktionssynthese)

Bei Steckbriefaufgaben werden bestimmte Eigenschaften einer Funktion vorgegeben. Gesucht ist die Gleichung der Funktion, deren Kurvenverlauf die gewünschten Eigenschaften hat. Steckbriefaufgaben können in Textform auftreten, oder aus einem graphischen Zusammenhang, wo entsprechende die Bedingungen ablesen werden.

Vorgehen:

1. Um welche Art Funktion handelt es sich? An der Anzahl an Unbekannten sehen wir, wie viele Bedingungen/ Vorgaben aufgestellt und berücksichtigt werden müssen: Für jede Unbekannte eine Bedingung. Meist sind auch Ableitungen zu bilden.

   lineare Funktion (1. Grades, Gerade) $f(x) = mx + b$ $f'(x) = m$
   quadratische Funktion (2. Grades, Parabel) $f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$
   Funktion 3. Grades (Schlange) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ …
   Funktion 4. Grades (Welle) $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

2. Ist eine **Symmetrie** vorhanden?
   Achsensymmetrie (Funktion ist spiegelbildlich zur y-Achse), dies bedeutet nur gerade Exponenten (x^4, x^2), kann bei Parabeln oder Funktionen 4. Grades auftreten.
   Punktsymmetrie in Bezug auf den Ursprung (Funktion unterscheidet sich zwischen plus und minus nur im Vorzeichen, nicht im Zahlenwert), dies bedeutet nur ungerade Exponenten (x^5, x^3, x^1), kann bei Funktionen 1., 3. oder 5. Grades auftreten.

3. Welche Vorgaben werden gemacht? Welche Informationen sind gegeben?
   Aussage über **Punkte** oder Funktionswerte $f(x) = y$,
   Aussagen über die **Steigung** $f'(x) = m$,
   Hinweis auf **Extremstellen** (Min/ Max) $f'(x) = 0$
   Hinweis auf **Wendepunkte** (Orte mit extremer Steigung) $f''(x) = 0$

4. Alle Informationen in mathematische Gleichungen übersetzen (siehe Funktionen 1.)

5. Lineares Gleichungssystem aufstellen und lösen (meist mit Additionsverfahren).

6. Funktionsgleichung aufschreiben und ggf. eine Probe mit Wertepaaren durchführen.

Beispiele für Information und ihre Bedeutung

Funktion geht durch den Punkt (3 / 8)	$f(3) = 8$
… geht durch den Ursprung → (0 / 0)	$f(0) = 0$
… schneidet die x-Achse bei x = 7	$f(7) = 0$
… berührt die x-Achse bei x = 5	$f(5) = 0$ und $f'(5) = 0$
… schneidet die y-Achse bei x = –3	$f(0) = -3$
… hat ein Maximum/ Minimum bei x = 4	$f'(4) = 0$
… hat im Punkt (7 / 2) ein Minimum	$f(7) = 2$ und $f'(7) = 0$
… hat einen Wendepunkt bei (3 / 6)	$f(3) = 6$ und $f''(3) = 0$
… hat bei x = 2 ein maximales Gefälle/ max. Steigung	$f''(2) = 0$
… hat bei x = 2 ein Gefälle von –3	$f'(2) = -3$
… hat bei x = 1 die Steigung 1,5 (150% od. 56,3°) Hinweis: 150% = 1,5 und tan(56,3°) = 1,5	$f'(1) = 1{,}5$
… hat bei x = 4,5 eine Steigung von 35°	$\tan(35°) = 0{,}7$ → $f'(4{,}5) = 0{,}7$
… hat bei x = 3 eine Krümmung von –1	$f''(3) = -1$

Formelsammlung zur FHR-Prüfung Mathematik

11. Optimierungsaufgaben (Extremwertaufgaben, geometr. Optimierungsprobleme)

Nr.	Schritte	Beschreibung / Begründung
1	**Hauptbedingung** aufstellen	Die Hauptbedingung **HB** gibt eine Formel an für das, was optimiert werden soll (z.B. Volumen, Fläche, Umfang), wovon also ein Maximum oder ein Minimum gesucht ist.
2	**Nebenbedingung** aufstellen und umformen	Die Nebenbedingungen **NB** sind die Informationen, die eine Einschränkung für das gegebene Problem darstellen. Auch die **NB** werden als Gleichungen aufgeschrieben. Manchmal treten auch Funktionen als beschränkende NB auf (Parabelbögen – quadratische Fkt., Geraden – lineare Fkt.) Die gefundenen Gleichungen werden nach einer geeigneten Unbekannten umgestellt (aufgelöst). Wir benötigen immer eine **NB** weniger als die **HB** unbekannte Größen (Variablen) enthält
3	**Zielfunktion** aufstellen	Die Zielfunktion **ZF** ergibt sich aus der Haupt- und den Nebenbedingungen. Die umgeformten **NB** werden in die **HB** eingesetzt, um damit alle Unbekannten bis auf **eine** zu eliminieren. Wenn alle bis auf eine Unbekannte eliminiert wurden, wird die **ZF** so weit wie möglich vereinfacht (Terme zusammenfassen, Klammern auflösen). Die **ZF** enthält nur noch eine unbekannte Größe (Variable)
4	**Optimieren**	Es wird nach einem Extremum der Zielfunktion gesucht. Die erste Ableitung der **ZF** wird gleich Null gesetzt. Der gefundene Wert wird in die zweite Ableitung eingesetzt, um zu überprüfen, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt. Wir erhalten das Ergebnis für die erste optimierte Größe
5	In die **Nebenbedingung einsetzen**	Der erhaltene Wert dieser optimierten Größe (Extremum) wird dazu benutzt, die verbleibenden Unbekannten zu bestimmen (für die Aufgabenstellung optimierte Werte). Dazu wird das Extremum in die Nebenbedingungen eingesetzt.
6	In die **Hauptbedingung einsetzen** (oder in die Zielfunktion)	Die gefundenen, optimierten Größen werden in die Hauptbedingung eingesetzt, um das gesuchte Maximum oder Minimum zu berechnen. Alternativ können wir auch die Zielfunktion verwenden, meist ist die **ZF** aber komplizierter aufgebaut als die **HB** In einem Antwortsatz muss alles zusammengefasst werden, die erhaltenen Werte mit Einheiten nennen (etwa m, m^2, m^3).

Formelsammlung zur FHR-Prüfung Mathematik

12. Preis-, Kosten-, Erlös-, Gewinnoptimierung (nicht mehr in der FHR-Prüfung)

Mathematischer Begriff	Wirtschaftliche Bedeutung	Berechnung
	Kostenfunktion	
Wendepunkt der Kostenfunktion (Kostenschlange x^3)	Produktionsmenge mit dem geringsten **Kostenzuwachs**	$K''(x) = 0$ Nullstelle der 2. Ableitung
Schnittpunkt der Kosten-Funktion mit der y-Achse	**Fixkosten**	Konstante in der Kostenfunktion (Wert ohne x)
	Preis-Absatz-Funktion	
Schnittpunkt der Preis-Absatz-Funktion mit der y-Achse (Monopol)	**Grenzpreis**, bei höheren Preisen wird das Produkt unverkäuflich	$p(x) = -mx + \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{b}$
Nullstelle der Preis-Absatz-Funktion (Monopol)	**Sättigungsmenge,** max. am Markt absetzbare Menge	$0 = -mx + b \rightarrow x_{max} = b : m$
	Erlösfunktion	
Erlösfunktion	**Einnahmen, Erlöse** Erlöse = Preis mal Menge	$E(x) = p \cdot x$ (Polypol) $E(x) = x \cdot p(x)$ (Monopol)
Maximum der Erlösfunktion, x-Wert: $\mathbf{x_{opt}}$	erlösmaximale **Menge** (Monopol)	$E'(x) = 0$ Nullstelle der 1. Ableitung $\rightarrow x_{opt}$
$\mathbf{E_{max}}$, **Maximum** der Erlösfunktion	maximaler **Erlös** (Monopol)	$E(x_{opt})$
	Stückkostenfunktionen	
Stückkostenfunktion	Stückkosten = Kosten geteilt durch die Menge x $\rightarrow$ **kostendeckender Preis**	$k(x) = K(x) : x$ Stückkosten $K(x) = k(x) \cdot x$ Gesamtkosten
Minimum der Stückkosten-Funktion	**Betriebsoptimum** $\rightarrow$ langfristige Preisuntergrenze	$k'(x) = 0$ meist wird dieses Minimum nur abgelesen
variable Stückkosten	Stückkosten **ohne** den **Fixkostenanteil**	$k_v(x) = (K(x) - K_{Fix}) : x$ $K(x) = k_v(x) \cdot x + K_{Fix}$
Minimum der variablen Stückkosten	**kurzfristige Preisuntergrenze**	$k_v'(x) = 0$ für Minimum
	Gewinnfunktion	
Gewinnfunktion ($-x^3$)	**Gewinn** = Erlöse – Kosten	$G(x) = E(x) - K(x)$
Gewinnschwelle	Erlöse decken gerade die Kosten, **E = K ,** BEP	erste positive Nullstelle der Gewinnfunktion $G(x) = 0$
Gewinngrenze	Erlöse decken gerade noch die stark steigenden Kosten	zweite positive Nullstelle der Gewinnfunktion $G(x) = 0$
Maximum der Gewinnfunktion, x-Wert: $\mathbf{x_{opt}}$	gewinnmaximale **Menge**	$G'(x) = 0$ zweite Nullstelle der 1. Ableitung: $\mathbf{x_2} \rightarrow$ ***Max*** erste Nullstelle $x_1 \rightarrow$ *Min*
$\mathbf{G_{max}}$, **Maximum** der Gewinnfunktion	maximaler **Gewinn** dazu **optimaler Preis**	$G(x_{max})$ $p(x_{max})$ (siehe Preis-Absatz-Fkt.)